Colle du 25/01 - Sujet 1
Ensembles applications, continuité et dérivabilité

Question de cours. Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ et que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 1. Soient E un ensemble et $f : E \to \mathscr{P}(E)$. Montrer que f n'est pas surjective à l'aide de $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f possède un point fixe.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 25/01 - Sujet 2
Ensembles applications, continuité et dérivabilité

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème d'encadrement.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $f : x \mapsto x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que f soit prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que f soit $\mathscr{C}^1$ en 0.

Exercice 2. Soit $f : [0;1] \mapsto \mathbb{R}$, on suppose que f s'annule $n+1$ fois sur $[0;1]$ et que f est n fois dérivable sur $[0;1]$. Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 25/01 - Sujet 3
Ensembles applications, continuité et dérivabilité

Question de cours. Démontrer l'unicité de la limite.

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est surjective si et seulement si

$$\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E), \qquad f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) \Rightarrow A \subseteq B.$$

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.
2. Si f et g sont surjectives, h est-elle surjective ?